ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 140 2022

© Черникова А.В., 2022
DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-386-404
УДК 517.929

О существовании предела средней временной выгоды в вероятностных моделях сбора возобновляемого ресурса

Анастасия Владимировна ЧЕРНИКОВА
ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

Аннотация. Исследуются модели динамики популяций, заданные разностными уравнениями со случайными параметрами. При отсутствии промысла развитие популяции в моменты времени $k=1,2,\ldots$ описывается уравнением $X(k+1)=f\big(X(k)\big),$ где $X(k)$ — количество возобновляемого ресурса, $f(x)$ — вещественная дифференцируемая функция. Предполагается, что в моменты $k=1,2,\ldots$ происходит изъятие случайной доли популяции $\omega\in[0,1].$ Процесс эксплуатации прекращается, когда в момент k доля собранного ресурса окажется больше некоторого значения $u(k)\in[0,1),$ чтобы сохранить часть популяции для воспроизводства и увеличения размера следующего сбора. При этом доля добываемого ресурса будет равна $\ell(k)=\min\big\{\omega(k),u(k)\big\},k=1,2,\ldots.$ Тогда модель эксплуатируемой популяции имеет вид

$$X(k+1)=f\big((1-\ell(k))X(k)\big),\quad k=1,2,\ldots,$$

где $x(0)$ — начальная численность популяции, $X(1)=f\big(x(0)\big).$ Для стохастической модели популяции исследуется задача выбора управления $\overline{u}=(u(1),\ldots,u(k),\ldots),$ ограничивающего в каждый момент времени k долю собираемого ресурса, при котором предел функции средней временной выгоды

$$H\big(\overline{\ell},x(0)\big)\doteq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X(k)\ell(k),\quad\text{где}\ \ \overline{\ell}\doteq(\ell(1),\ldots,\ell(k),\ldots)$$

существует и его можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом. Если уравнение $X(k+1)=f\big(X(k)\big)$ имеет решение вида $X(k)\equiv x^*,$ то это решение называется положением равновесия данного уравнения. Для любого $k=1,2,\ldots$ вводятся в рассмотрение случайные величины $A(k+1,x)=f\big((1-\ell(k))A(k,x)\big),$ $B(k+1,x^*)=f\big((1-\ell(k))B(k,x^*)\big)$; здесь $A(1,x)=f(x),$ $B(1,x^*)=x^*.$ Показано, что при выполнении определенных условий существует управление $\overline{u},$ при котором справедлива оценка средней временной выгоды

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}M\big(A(k,x)\ell(k)\big)\leqslant H(\overline{\ell},x(0))\leqslant\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}M\big(B(k,x^*)\ell(k)\big),$$

где через M обозначено математическое ожидание. Кроме того, получены условия существования управления $\overline{u},$ при котором с вероятностью единица существует положительный предел средней временной выгоды, равный

$$H(\overline{\ell},x(0))=\lim_{k\to\infty}MA(k,x)\ell(k)=\lim_{k\to\infty}MB(k,x^*)\ell(k).$$

Ключевые слова: подверженная промыслу стохастическая модель популяции, средняя временная выгода, оптимальная эксплуатация

Для цитирования: *Черникова А.В.* О существовании предела средней временной выгоды в вероятностных моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 386–404. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-386-404.

© A. V. Chernikova, 2022
DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-386-404

OPEN ACCESS
CC BY

About existence of the limit to the average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource

Anastasia V. CHERNIKOVA
Vladimir State University
87 Gorky St., Vladimir 600000, Russian Federation

Abstract. We investigate population dynamics models given by difference equations with stochastic parameters. In the absence of harvesting, the development of the population at time points $k = 1,2,\ldots$ is given by the equation $X(k+1) = f\big(X(k)\big)$, where $X(k)$ is amount of renewable resource, $f(x)$ is a real differentiable function. It is assumed that at times $k = 1,2,\ldots$ a random fraction $\omega \in [0,1]$ of the population is harvested. The harvesting process stops when at the moment k the share of the collected resource becomes greater than a certain value $u(k) \in [0,1)$, in order to save a part of the population for reproduction and to increase the size of the next harvest. In this case, the share of the extracted resource is equal to $\ell(k) = \min\big\{\omega(k), u(k)\big\}, k = 1,2,\ldots$. Then the model of the exploited population has the form

$$X(k+1) = f\big((1-\ell(k))X(k)\big), \quad k = 1,2,\ldots,$$

where $X(1) = f\big(x(0)\big)$, $x(0)$ is the initial population size. For the stochastic population model, we study the problem of choosing a control $\overline{u} = (u(1),\ldots,u(k),\ldots)$ that limits at each time moment k the share of the extracted resource and under which the limit of the average time profit function

$$H\big(\overline{\ell}, x(0)\big) \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X(k)\ell(k), \quad \text{where} \quad \overline{\ell} \doteq (\ell(1),\ldots,\ell(k),\ldots),$$

exists and can be estimated from below with probability one by as a large number as possible. If the equation $X(k+1) = f\big(X(k)\big)$ has a solution of the form $X(k) \equiv x^*$, then this solution is called the equilibrium position of the equation. For any $k = 1,2,\ldots$, we consider random variables $A(k+1,x) = f\big((1-\ell(k))A(k,x)\big)$, $B(k+1,x^*) = f\big((1-\ell(k))B(k,x^*)\big)$; here $A(1,x) = f(x)$, $B(1,x^*) = x^*$. It is shown that when certain conditions are met, there exists a control $\overline{u}$ under which there holds the estimate of the average time profit

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} M\big(A(k,x)\ell(k)\big) \leqslant H(\overline{\ell}, x(0)) \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} M\big(B(k,x^*)\ell(k)\big),$$

where M denotes the mathematical expectation. In addition, the conditions for the existence of control $\overline{u}$ are obtained under which there exists, with probability one, a positive limit to the average time profit equal to

$$H(\overline{\ell}, x(0)) = \lim_{k\to\infty} MA(k,x)\ell(k) = \lim_{k\to\infty} MB(k,x^*)\ell(k).$$

Keywords: stochastic model of the population subject to harvesting, average time profit, optimal exploitation

Mathematics Subject Classification: 37N35, 39A50, 49N25, 93C55.

For citation: Chernikova A.V. O sushchestvovanii predela sredney vremennoy vygody v veroyatnostnykh modelyakh sbora vozobnovlyayemogo resursa [About existence of the limit to the average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 386–404. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-386-404. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Эксплуатация природных ресурсов имеет основополагающее значение для выживания человечества. Как известно, чрезмерная эксплуатация возобновляемых ресурсов (например, популяций животных и, в частности, рыб) может привести к их исчезновению и, как следствие, повлиять на экономику, например, ростом цен и высокой неопределенностью в будущем. Таким образом, возникает дилемма: либо интенсивно добывать ресурс для увеличения доходов, либо учитывать возможные отрицательные последствия чрезмерной эксплуатации, влияющие на будущую способность добычи. Поэтому экологическое и экономическое обоснование оптимальных режимов добычи ресурса является ключевой задачей математической биологии [1].

Вопросы оптимизации сбора урожая и максимизации прибыли от него для детерминированных моделей популяций изучались довольно полно примерно со второй половины прошлого столетия [1–3]. Наибольший интерес для исследования вызывают структурированные популяции, например, по возрасту или виду. В [4] доказано, что при селективном режиме промысла оптимальное усилие, прилагаемое к сбору, является периодическим; если избирательности вылова нет, то оптимальным является стационарное усилие. Периодичность оптимального промыслового усилия обусловлена избирательностью сбора. Режимы сбора на конечном и бесконечном промежутках времени для структурированной по возрасту популяции при различных ограничениях на условия промысла получены в [5].

Однако, в моделях популяционной динамики важно учитывать случайные колебания внешней среды, которые встречаются в реальном мире. Одной из важных проблем природосбережения является решение задачи оптимального сбора ресурса, подверженного стохастическим колебаниям окружающей среды [6–8]. За последние годы работы по данной тематике обобщались и дополнялись новыми исследованиями. Так, в [9] показано, что при селективном промысле структурированной по возрасту популяции максимальная устойчивая урожайность приводит к серьезному отклонению от экономической оптимальности, поскольку пренебрегает зависимостью затрат на сбор от выбора орудий сбора. В связи с этим во многих работах принимается во внимание прилагаемое усилие сбора. При эксплуатации популяций, заданных стохастическими логистическими моделями, необходимо уменьшить усилия по сбору урожая и интенсивность воздействия окружающей среды [10]. В противном случае максимальная устойчивая урожайность будет увеличиваться по мере увеличения усилий по сбору урожая, а чрезмерная эксплуатация снизит уровень максимальной устойчивой урожайности и в конечном итоге приведет к вымиранию всей популяции с вероятностью единица. Кроме того, интересной представляется задача посева урожая. В [11] описывается оптимальная стратегия сбора и посева урожая, которая максимизирует доход от сбора урожая за вычетом потерянного дохода от посева. Показано, что не оптимально осуществлять сбор и посев более чем из одной популяции одновременно. В работе [12] для вероятностной модели, описывающей динамику структурированной по виду популяции, получены оценки средней временной выгоды при эксплуатации. Для стохастической модели развития однородной популяции, описанной в [13], показано, что оценки средней временной выгоды существенно зависят от свойств функции, определяющей динамику популяции при отсутствии эксплуатации. Подробный обзор работ по данной тематике приведен в [14, 15].

В данной работе рассматривается модель популяции, заданная разностным уравнением со случайными параметрами. Исследуется задача выбора управления сбором возобновляемого ресурса, при котором функцию средней временной выгоды от сбора можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом. Получены оценки средней временной выгоды и показано, что при выполнении определенных условий найдется управление, при котором существует ее положительный предел.

1. Основные определения и обозначения

Будем рассматривать модели динамики эксплуатируемой популяции, заданные разностными уравнениями со случайными параметрами. Развитие популяции при отсутствии эксплуатации описывается разностным уравнением

$$X(k+1)=f\bigl(X(k)\bigr),\quad k=1,2,\ldots, \tag{1.1}$$

где $f(x)$ — вещественная дифференцируемая функция, заданная на отрезке $I=[0,a]$, такая, что $f(I)\subseteq I$. Отметим, что для ограниченных неотрицательных функций $f(x)$, определенных на $[0,+\infty)$, все утверждения статьи также верны.

Предполагаем, что в моменты времени k из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega(k)\in\Omega\subseteq[0,1]$, $k=1,2,\ldots,$ что приводит к уменьшению его количества. На процесс сбора можно влиять таким образом, чтобы остановить заготовку, когда ее доля окажется больше некоторого значения $u(k)\in[0,1)$ в момент k, чтобы сохранить возможно больший остаток для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell(k)=\ell\bigl(\omega(k),u(k)\bigr)=\min\bigl\{\omega(k),u(k)\bigr\},\quad k=1,2,\ldots. \tag{1.2}$$

Таким образом, модель эксплуатируемой популяции имеет вид

$$X(k+1)=f\bigl((1-\ell(k))X(k)\bigr),\quad k=1,2,\ldots,$$

где $x(0)$ — начальная численность, $X(1)=f(x(0))$, $X(k)=X\bigl(\ell(1),\ldots,\ell(k-1),x(0)\bigr)$ — количество ресурса до сбора в момент $k=2,3,\ldots,$ зависящее от долей $\ell(1),\ldots,\ell(k-1)$ ресурса, собранного в предыдущие моменты, и от начальной численности популяции $x(0)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. (см. [16, 17]). *Средней временной выгодой* от извлечения ресурса называется функция

$$H_*\bigl(\overline{\ell},x(0)\bigr)\doteq\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X(k)\ell(k),\quad\text{где } \overline{\ell}\doteq(\ell(1),\ldots,\ell(k),\ldots). \tag{1.3}$$

Отметим, что если в (1.3) нижний предел заменить на верхний, то аналогично можно определить функцию $H^*\bigl(\overline{\ell},x(0)\bigr)$. Если выполнено равенство

$$H_*\bigl(\overline{\ell},x(0)\bigr)=H^*\bigl(\overline{\ell},x(0)\bigr),$$

то определим предел

$$H\bigl(\overline{\ell},x(0)\bigr)\doteq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X(k)\ell(k).$$

Пусть $U\doteq\bigl\{\overline{u}:\overline{u}=(u(1),\ldots,u(k),\ldots)\bigr\}$. Исследуем задачу выбора управления сбором $\overline{u}=(u(1),\ldots,u(k),\ldots)\in U$, ограничивающего долю добываемого ресурса в каждый момент времени k, при котором предел $H\bigl(\overline{\ell},x(0)\bigr)$ существует и значение этой функции можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом.

2. Оценка средней временной выгоды, выполненная с вероятностью единица

Приведем описание вероятностной модели. Отметим, что аналогичная вероятностная модель для случая, когда динамика популяции задана дифференциальным уравнением со случайным параметром, описана в [16, 17]. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\mu})$, где $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств $\Omega \subseteq [0,1]$, на которой с помощью функции распределения $G(x)$ определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$ следующим образом:

$$\widetilde{\mu}\big((\alpha,\beta]\big) = G(\beta) - G(\alpha), \quad \alpha,\beta \in [0,1].$$

Определим вероятностную модель $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, где $\Sigma \doteq \big\{\sigma : \sigma = (\omega(1),\ldots,\omega(k),\ldots)\big\}$, $\omega(k) \in \Omega$, $\mathfrak{A}$ — наименьшая сигма-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами

$$D(k) \doteq \big\{\sigma \in \Sigma : \omega(1) \in \mathcal{A}(1),\ldots,\omega(k) \in \mathcal{A}(k)\big\}, \quad \text{где } \mathcal{A}(1) \in \widetilde{\mathfrak{A}},\ldots,\mathcal{A}(k) \in \widetilde{\mathfrak{A}}$$

и зададим меру

$$\widetilde{\mu}\big(D(k)\big) \doteq \widetilde{\mu}\big(\mathcal{A}(1)\big)\cdot\widetilde{\mu}\big(\mathcal{A}(2)\big)\cdot\ldots\cdot\widetilde{\mu}\big(\mathcal{A}(k)\big).$$

Тогда в силу теоремы Колмогорова [18, глава 2, с. 204] на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Определение 2.1. (см. [19, с. 44]). Если уравнение (1.1) имеет решение вида $X(k) \equiv \mathrm{const} = x^*$, то это решение называется *положением равновесия* (*неподвижной точкой*) *данного уравнения*, причем $x^* = f\big(x^*\big)$.

Определение 2.2. (см. [19, с. 44]). Решение $X(k) \equiv x^*$ уравнения (1.1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только $\big|X(1) - x^*\big| < \delta$, то $\big|X(k) - x^*\big| < \varepsilon$ для всех $k \geqslant 1$. Положение равновесия $X(k) \equiv x^*$ *асимптотически устойчиво*, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого начального условия $X(1)$ из некоторой окрестности точки x^* имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty}\big|X(k) - x^*\big| = 0;$$

такую окрестность точки x^* назовем *областью притяжения решения.*

Для любого $k = 1, 2, \ldots$ зададим случайные величины

$$A(k,x) = A\big(k,x,\overline{\ell}(k)\big), \quad B(k,x^*) = B\big(k,x^*,\overline{\ell}(k)\big), \quad \text{где } \overline{\ell}(k) \doteq (\ell(1),\ldots,\ell(k))$$

рекуррентным образом:

$$\begin{aligned} A(1,x) &= f(x), \quad B(1,x^*) = x^*,\\ A(k+1,x) &= f\big((1-\ell(k))A(k,x)\big),\\ B(k+1,x^*) &= f\big((1-\ell(k))B(k,x^*)\big). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Пусть уравнение* (1.1) *имеет решение* $X(k) \equiv x^* > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ *и* $0 < f'(x^*) < 1$. *Обозначим через* $[a_1, a_2]$ *отрезок, содержащий точку* x^*, *для всех точек которого выполнено неравенство*

$$0 < f'(x) < 1.$$

Тогда

1) *для всех* $x \in [a_1, x^*]$ *выполнено*

$$x \leqslant f(x) \leqslant x^*, \tag{2.2}$$

2) $[a_1, a_2]$ *содержится в области притяжения решения* $X(k) \equiv x^*$, $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Докажем пункт 1 леммы. Рассмотрим поведение функции $F(x) \doteq f(x) - x$ на отрезке $[a_1, x^*]$. Отметим, что

$$F'(x) = \big(f(x) - x\big)' = f'(x) - 1 < 0$$

для всех $x \in [a_1, x^*]$. Следовательно, функция $F(x)$ убывает в (a_1, x^*) и, кроме того,

$$F(x^*) = f(x^*) - x^* = 0.$$

Тогда, для всех $x \in [a_1, x^*]$ выполнено

$$F(x) = f(x) - x \geqslant 0,$$

откуда следует, что $f(x) \geqslant x$. По условию леммы функция $f(x)$ возрастает в (a_1, x^*), тогда $f(x) \leqslant f(x^*) = x^*$ при $x \in [a_1, x^*]$. Окончательно получаем, что неравенство (2.2) выполнено для всех $x \in [a_1, x^*]$.

Перейдем к доказательству пункта 2. Пусть $X(1) \in [a_1, x^*)$. Тогда из (2.2) следует, что

$$X(1) \leqslant X(2) = f(X(1)) \leqslant f(x^*) = x^*.$$

Поэтому, в силу теоремы Лагранжа, существует $\widehat{X}(1) \in \big(X(1), x^*\big)$ такое, что

$$\big|X(2) - x^*\big| = \big|f(X(1)) - f(x^*)\big| = f'(\widehat{X}(1))\big|X(1) - x^*\big|.$$

Тогда,

$$\widehat{X}(1) \in \big(X(1), x^*\big) \subseteq (a_1, x^*) \subseteq (a_1, a_2).$$

Затем, учитывая неравенство (2.2), получаем, что

$$X(2) \leqslant X(3) = f(X(2)) \leqslant f(x^*) = x^*.$$

По теореме Лагранжа существует $\widehat{X}(2) \in \big(X(2), x^*\big)$ такое, что

$$\big|X(3) - x^*\big| = \big|f(X(2)) - f(x^*)\big| = f'(\widehat{X}(2))\big|X(2) - x^*\big|.$$

Отметим, что $\widehat{X}(2) \in \big(X(2), x^*\big) \subseteq (a_1, x^*) \subseteq (a_1, a_2)$. Аналогично получаем равенство

$$\big|X(k+1) - x^*\big| = \big|f(X(k)) - f(x^*)\big| = f'(\widehat{X}(k))\big|X(k) - x^*\big|$$

для всех $k = 1, 2, \ldots,$ где $\widehat{X}(k) \in (a_1, a_2)$.

Обозначим $\delta = \max\limits_{x \in [a_1, a_2]} f'(x)$. Из условия $0 < f'(x) < 1$ для всех $x \in [a_1, a_2]$ следует, что $\delta < 1$. Окончательно для всех $X(k) \in [a_1, x^*]$, $k = 1, 2, \ldots$ выполнено $X(k) \leqslant x^*$ и

$$\begin{aligned}\big|X(k+1) - x^*\big| &= \big|f(X(k)) - f(x^*)\big| \\ &= f'(\widehat{X}(1)) f'(\widehat{X}(2)) \ldots f'(\widehat{X}(k))\big|X(1) - x^*\big| \leqslant \delta^k \big|X(1) - x^*\big|.\end{aligned}$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \delta^k = 0,$ справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} \big|X(k) - x^*\big| = 0.$$

Аналогичное утверждение выполнено, если $X(1) \in (x^*, a_2]$. Следовательно, отрезок $[a_1, a_2]$ содержится в области притяжения решения. □

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $X(k) \equiv x^* > 0, \ \ k = 1, 2, \ldots$ *является неподвижной точкой уравнения* (1.1) *и существует отрезок* $[a_1, a_2]$ *такой, что* $x^* \in [a_1, a_2]$ *и* $0 < f'(x) < 1$ *для всех* $x \in [a_1, a_2]$;

2) $G(0) < 1$.

Тогда для любых $m \in \mathbb{N}, \ \ x \in [a_1, x^*]$ *и* $x(0) \in [a_1, a_2]$ *существует управление* $\overline{u} \in U$ *такое, что для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *справедлива оценка*

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} M\big(A(k,x)\ell(k)\big) \leqslant H(\bar{\ell}, x(0)) \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} M\big(B(k,x^*)\ell(k)\big). \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и $x \in [a_1, x^*]$. Определим последовательности случайных величин $\{\widetilde{A}(k,x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\widetilde{B}(k,x^*)\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\widetilde{A}(sm+1, x) \doteq f(x), \quad \widetilde{A}(sm+i, x) \doteq f\big((1 - \ell(sm+i-1))\widetilde{A}(sm+i-1, x)\big),$$

$$\widetilde{B}(sm+1, x^*) \doteq x^*, \quad \widetilde{B}(sm+i, x^*) \doteq f\big((1 - \ell(sm+i-1))\widetilde{B}(sm+i-1, x^*)\big),$$

где $i = 2, \ldots, m, \ \ s = 0, 1, \ldots.$ Здесь доли $\ell(k)$ добываемого ресурса для всех $k = 1, 2, \ldots$ задаются равенством (1.2); управление $\overline{u} = \big(u(1), \ldots, u(k), \ldots\big) \in U$ выбирается в зависимости от расположения начальной точки $x(0)$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $x(0) \in [x, x^*], \ \ x \in [a_1, x^*]$. Поскольку функция $f(x)$ возрастающая в (a_1, a_2), имеем

$$\widetilde{A}(1,x) = f(x) \leqslant X(1) = f\big(x(0)\big) \leqslant f(x^*) = x^* = \widetilde{B}(1, x^*).$$

Если $m \geqslant 2$, то для $X(2) = f\big(x(1)\big) = f\big((1 - \ell(1))X(1)\big)$ выполнены неравенства

$$\widetilde{A}(2,x) = f\big((1-\ell(1))\widetilde{A}(1,x)\big) \leqslant X(2) \leqslant f\big((1-\ell(1))\widetilde{B}(1,x^*)\big) = \widetilde{B}(2,x^*). \tag{2.4}$$

Аналогично для всех $k = 1, \ldots, m$ получаем, что $\widetilde{A}(k,x) \leqslant X(k) \leqslant \widetilde{B}(k,x^*)$. Обозначим через $x(k)$ — количество ресурса после сбора в момент k; тогда $x(k) = (1 - \ell(k))X(k)$, $k = 1, 2, \ldots.$ Покажем, что управление $\overline{u} \in U$, при котором выполнено (2.3), можно определить равенствами $u(k) = 1 - \dfrac{x}{\widetilde{A}(k,x)}$ при всех $k = 1, 2, \ldots.$ Из неравенств

$$\ell(m) = \min\big\{\omega(m), u(m)\big\} \leqslant u(m) \ \text{ и } \ \widetilde{A}(m,x) \leqslant X(m)$$

следует, что

$$x(m) = \big(1 - \ell(m)\big)X(m) \geqslant (1 - u(m))X(m) = \frac{xX(m)}{\widetilde{A}(m,x)} \geqslant x.$$

Из последнего неравенства при $x(0) \in [x, x^*]$ имеем

$$\widetilde{A}(m+1,x) = f(x) \leqslant X(m+1) = f\big(x(m)\big) \leqslant x^* = \widetilde{B}(m+1,x^*).$$

Отсюда, аналогично (2.4), следует, что

$$\widetilde{A}(m+i,x) \leqslant X(m+i) \leqslant \widetilde{B}(m+i,x^*), \quad i=2,\ldots,m.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получаем

$$\widetilde{A}(k,x) \leqslant X(k) \leqslant \widetilde{B}(k,x^*) \quad \text{для всех } k=1,2,\ldots. \tag{2.5}$$

Покажем, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{A}(k,x)\ell(k)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{B}(k,x^*)\ell(k)$ существуют с вероятностью единица. Действительно, случайные величины

$$\widetilde{A}\big(m(p-1)+1,x\big)\ell\big(m(p-1)+1\big)+\ldots+\widetilde{A}\big(mp,x\big)\ell\big(mp\big), \qquad p=1,2,\ldots,$$

независимы, ограничены и одинаково распределены, поэтому в силу усиленного закона больших чисел Колмогорова (см. [18, глава 4, с. 377]) с вероятностью единица выполнено

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{A}(k,x)\ell(k) &= \lim_{p\to\infty}\frac{1}{mp}\sum_{k=1}^{mp}\widetilde{A}(k,x)\ell(k)\\ &= \lim_{p\to\infty}\frac{1}{mp}\sum_{j=1}^{p}\Big(\widetilde{A}\big(m(j-1)+1,x\big)\ell\big(m(j-1)+1\big)+\ldots+\widetilde{A}\big(mj,x\big)\ell\big(mj\big)\Big)\\ &= \frac{1}{m}M\Big(\widetilde{A}(1,x)\ell(1)+\ldots+\widetilde{A}(m,x)\ell(m)\Big).\end{aligned}$$

Отметим, что для последовательности $\{\widetilde{B}(k,x^*)\}_{k=1}^{\infty}$ выполнено подобное равенство. Отсюда, учитывая (2.5), получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}M\big(\widetilde{A}(k,x)\ell(k)\big) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{A}(k,x)\ell(k) \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X(k)\ell(k)\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{B}(k,x^*)\ell(k) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}M\big(\widetilde{B}(k,x^*)\ell(k)\big)\end{aligned} \tag{2.6}$$

для почти всех $\sigma\in\Sigma$, поэтому из неравенства (2.6) получаем (2.3).

2. Пусть $x(0)\in[a_1,x)$. Положим, что для всех $k=1,\ldots,k_0$ извлечение ресурса не происходит, т. е. $u(k)=0$. Здесь $k_0=k_0\big(x(0)\big)$ — наименьшее из натуральных чисел таких, что $x(k)=X(k)=f\big(X(k-1)\big)\geqslant x$. Данное значение k_0 существует, так как по лемме 2.1 точка $x(0)$ содержится в области притяжения решения $X(k)\equiv x^*$. Определим $u(k)=1-\dfrac{x}{\widetilde{A}(k,x)}$ для всех $k>k_0$, тогда

$$\widetilde{A}(k,x)\leqslant X(k)\leqslant \widetilde{B}(k,x^*) \text{ при всех } k>k_0;$$

это доказывается также, как в первом случае. Следовательно, неравенство (2.6) справедливо при выбранном управлении $\overline{u}=\big(u(1),\ldots,u(k),\ldots\big)$, поэтому (2.3) выполнено для почти всех $\sigma\in\Sigma$.

3. Рассмотрим случай, когда $x(0)\in(x^*,a_2]$. Здесь $x\leqslant x^*\leqslant f\big(x(0)\big)=X(1)\leqslant f(a_2)$. Пусть $k_1=k_1\big(x(0)\big)$ — наименьшее из натуральных чисел таких, что $x(k)\leqslant x^*$ при

$u(1) = \ldots = u(k) = 1$. Покажем, что данное число существует с вероятностью единица. Отметим, что такое число существует, если $\omega(k_1) = 1$ при некотором $k_1 = 1, 2, \ldots$; тогда $x(k) = 0$ при всех $k \leqslant k_1$.

Пусть теперь $\omega(k) \neq 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку функция $f(x)$ убывает при $x > x^*$, то $X(k+1) = f\big((1 - \ell(k))X(k)\big) < x(k)$, если $x(k) > x^*$, $k = 1, 2, \ldots$. Далее, если $u(k) = 1$, то $\ell(\omega(k), 1) = \omega(k)$; поэтому, если $x(0) > x^*$ и $u(1) = 1$, то

$$x(1) = (1 - \omega(1))X(1) < (1 - \omega(1))x(0);$$

если $x(1) > x^*$ и $u(1) = u(2) = 1$, то

$$x(2) = (1 - \omega(2))X(2) < (1 - \omega(2))x(1) < (1 - \omega(1))(1 - \omega(2))x(0).$$

Аналогично получаем, что если $x(k) > x^*$ и $u(1) = \ldots = u(k+1) = 1$, то

$$x(k+1) < (1 - \omega(1))(1 - \omega(2)) \cdot \ldots \cdot (1 - \omega(k+1))x(0).$$

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\big\{C(k, \omega(k))\big\}_{k=1}^{\infty}$, где $C(k, \omega(k)) = 1 - \omega(k)$. Введем также последовательность $\big\{S(k, \omega(k))\big\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$S(k, \omega(k)) = \ln(1 - \omega(1)) + \ldots + \ln(1 - \omega(k)),$$

которая является случайным блужданием на прямой. Покажем, что если $G(0) < 1$, то

$$M \ln(1 - \omega(k)) < 0. \tag{2.7}$$

Действительно, так как $\omega(k) \in [0, 1)$, то $\ln(1 - \omega(k)) \leqslant 0$, поэтому для математического ожидания либо выполнено неравенство (2.7), либо $M \ln(1 - \omega(k)) = 0$. В последнем случае $\omega(k) = 0$ с вероятностью единица [18, глава 2, § 6], что противоречит условию $G(0) = \widetilde{\mu}(\omega(k) = 0) < 1$. Из (2.7) следует, что с вероятностью единица $S(k, \omega(k))$ уходит в минус бесконечность (см. [20, глава 12, § 2]). Это означает, что существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} S(k, \omega(k)) = -\infty$ для всех $\omega(k) \in \Sigma_0$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} C(1, \omega(1)) \cdot \ldots \cdot C(k, \omega(k)) = 0 \text{ для всех } \omega(k) \in \Sigma_0,$$

поэтому с вероятностью единица найдется $k_1 = k_1(x(0))$ такое, что $(1 - \omega(k_1))X(k_1) \leqslant x^*$.

Выберем управления

$$u(k) = 1, \quad k = 1, \ldots, k_1 - 1; \quad u(k_1) = 1 - \frac{x}{X(k_1)}; \quad u(k) = 1 - \frac{x}{\widetilde{A}(k, x)}, \quad k = k_1 + 1, \ldots.$$

Тогда из $x(k_1) = \big(1 - \ell(k_1)\big)X(k_1)$ и неравенства $\ell\big(\omega(k_1), u(k_1)\big) \leqslant u(k_1)$ получаем, что

$$x = \big(1 - u(k_1)\big)X(k_1) \leqslant x(k_1) \leqslant x^*,$$

то есть $x(k_1) \in [x, x^*]$. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство первого пункта. □

3. О существовании предела средней временной выгоды

Приведем условия, при которых существуют пределы последовательностей

$$\big\{MA(k,x)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \big\{MB(k,x^*)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty},$$

где $A(k,x)$, $B(k,x^*)$ определены равенствами (2.1) для всех $k=1,2,\dots$.

Лемма 3.1. *Предположим, что уравнение* (1.1) *имеет решение* $X(k)\equiv x^*>0$, $k=1,2,\dots$ *и существует* $a_1\in[0,x^*)$ *такое, что* $0<f'(x)<1$ *для всех* $x\in(a_1,x^*)$. *Тогда найдется* $\overline{u}\in U$ *такое, что*

1) *если* $x\in(a_1,x^*)$, *то последовательность* $\big\{MA(k,x)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ *неубывающая, а последовательность* $\big\{MB(k,x^*)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ *невозрастающая,*

2) *существуют пределы математических ожиданий*

$$\lim_{k\to\infty} MA(k,x)\ell(k), \quad \lim_{k\to\infty} MB(k,x^*)\ell(k). \tag{3.1}$$

Доказательство. Покажем, что для всех $x\in(a_1,x^*)$ последовательность $\big\{MA(k,x)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ является неубывающей, т. е.

$$MA(k,x)\ell(k)\leqslant MA(k+1,x)\ell(k+1), \qquad k=1,2,\dots .$$

Определим

$$u(k)=1-\frac{x}{A(k,x)}, \qquad k=1,2,\dots . \tag{3.2}$$

Убедимся, что выполнено неравенство $f(x)=A(1,x)\leqslant A(2,x)=f\big((1-\ell(1))f(x)\big)$ для любых $x\in[a_1,x^*]$. Отметим, что

$$x\leqslant(1-\ell(1))f(x)=\max\big\{(1-\omega(1))f(x),(1-u(1))f(x)\big\}=\max\big\{(1-\omega(1))f(x),x\big\},$$

и так как функция $f(x)$ возрастающая при всех $x\in(a_1,x^*)$, то по лемме 2.1 получаем, что

$$(1-\omega(1))f(x)\leqslant f(x)\leqslant x^*.$$

Следовательно, $\max\big\{(1-\omega(1))f(x),x\big\}\in(a_1,x^*]$ и для любого $\ell(1)$

$$f(x)\leqslant f\big(1-\ell(1))f(x)\big)=f\big(\max\big\{(1-\omega(1))f(x),x\big\}\big). \tag{3.3}$$

Далее, для всех $x\in(a_1,x^*)$ и с учетом (2.1), (1.2) и (3.2) найдем математические ожидания случайных величин $MA(1,x)\ell(1)$ и $MA(2,x)\ell(2)$:

$$\begin{aligned}
MA(1,x)\ell(1)&=M\min\Big\{\omega(1)f(x),u(1)f(x)\Big\}\\
&=M\min\Big\{\omega(1)f(x),f(x)-x\Big\}=M\min\Big\{\omega(2)f(x),f(x)-x\Big\},\\
MA(2,x)\ell(2)&=M\min\Big\{\omega(2)f\big((1-\ell(1))f(x)\big),u(2)f\big((1-\ell(1))f(x)\big)\Big\}\\
&=M\min\Big\{\omega(2)f\big((1-\ell(1))f(x)\big),f\big((1-\ell(1))f(x)\big)-x\Big\}.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.3), получаем, что для любого $\ell(1)$ выполнено

$$\omega(2)f(x)\leqslant\omega(2)f\big((1-\ell(1))f(x)\big) \quad \text{или} \quad f(x)-x\leqslant f\big((1-\ell(1))f(x)\big)-x.$$

Таком образом,

$$\min\big\{\omega(2)f(x), f(x)-x\big\} \leqslant \min\big\{\omega(2)f\big((1-\ell(1))f(x)\big), f\big((1-\ell(1))f(x)\big)-x\big\}$$

и, следовательно,

$$MA(1,x)\ell(1) \leqslant MA(2,x)\ell(2).$$

Покажем далее, что $MA(2,x)\ell(2) \leqslant MA(3,x)\ell(3)$. Находя математические ожидания $MA(2,x)\ell(2)$ и $MA(3,x)\ell(3)$, получим

$$\begin{aligned} MA(2,x)\ell(2) &= M\min\Big\{\omega(2)f\big((1-\ell(1))f(x)\big), f\big((1-\ell(1))f(x)\big)-x\Big\} \\ &= M\min\Big\{\omega(2)f\big(\max\big\{(1-\omega(1))f(x),x\big\}\big), f\big(\max\big\{(1-\omega(1))f(x),x\big\}\big)-x\Big\} \\ &= M\min\Big\{\omega(3)f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f(x),x\big\}\big), f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f(x),x\big\}\big)-x\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MA(3,x)\ell(3) &= M\min\Big\{\omega(3)f\big((1-\ell(2))f(x)\big), f\big((1-\ell(2))f(x)\big)-x\Big\} \\ &= M\min\Big\{\omega(3)f\Big((1-\ell(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big)\Big), \\ &\qquad\qquad f\Big((1-\ell(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big)\Big)-x\Big\} \\ &= M\min\Big\{\omega(3)f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big),x\big\}\big), \\ &\qquad\qquad f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big),x\big\}\big)-x\Big\}. \end{aligned}$$

Снова с учетом (3.3) получаем, что для любого $\ell(2)$ выполнено

$$\omega(3)f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f(x),x\big\}\big) \leqslant \omega(3)f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big),x\big\}\big)$$

или

$$f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f(x),x\big\}\big)-x \leqslant f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big),x\big\}\big)-x,$$

откуда следует, что

$$(1-\omega(2))f(x) \leqslant (1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big).$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} &\min\Big\{\omega(3)f\big(\max\big\{(1-\omega(2))A(1,x),x\big\}\big), f\big(\max\big\{(1-\omega(2))A(1,x),x\big\}\big)-x\Big\} \\ \leqslant &\min\Big\{\omega(3)f\Big(\max\big\{(1-\omega(2))A(2,x),x\big\}\Big), f\Big(\max\big\{(1-\omega(2))A(2,x),x\big\}\Big)-x\Big\}, \end{aligned}$$

где $A(1,x)=f(x)$, $A(2,x)=f\big((1-\ell(1))f(x)\big)$. Следовательно,

$$MA(2,x)\ell(2) \leqslant MA(3,x)\ell(3).$$

Тогда для всех $x\in(a_1,x^*)$ и $k=1,2,\ldots$ можно показать, что

$$MA(k,x)\ell(k) \leqslant MA(k+1,x)\ell(k+1) \tag{3.4}$$

и, следовательно, последовательность $\big\{MA(k,x)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ является неубывающей.

Проводя аналогичные рассуждения можно показать, что при любом $x \in (a_1, x^*)$ последовательность $\{MB(k,x)\}_{k=1}^{\infty}$ невозрастающая, т. е. $MB(k,x) \geqslant MB(k+1,x)$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Нетрудно удостовериться в том, что выполнено неравенство

$$x^* = B(1,x^*) \geqslant B(2,x^*) = f\big((1-\ell(1))x^*\big)$$

для любых $x \in [a_1, x^*]$. Заметим, что

$$x^* \geqslant (1-\ell(1))x^* = \max\big\{1-\omega(1), 1-u(1)\big\}x^*,$$

и так как для всех $x \in (a_1, x^*)$ функция $f(x)$ возрастающая, то снова с учетом леммы 2.1 получаем

$$x^* \geqslant f\big((1-\ell(1))x^*\big) = f\Big(\max\big\{1-\omega(1), 1-u(1)\big\}x^*\Big). \tag{3.5}$$

Математические ожидания случайных величин $MB(1,x^*)\ell(1)$ и $MB(2,x^*)\ell(2)$ имеют вид:

$$MB(1,x^*)\ell(1) = M\min\Big\{\omega(1)x^*, u(1)x^*\Big\} = M\min\Big\{\omega(2)x^*, u(2)x^*\Big\},$$

$$MB(2,x^*)\ell(2) = M\min\Big\{\omega(2)f\big((1-\ell(1))x^*\big), u(2)f\big((1-\ell(1))x^*\big)\Big\}.$$

Принимая во внимание (3.5), получаем, что для любого $\ell(1)$ выполнено

$$\omega(2)x^* \geqslant \omega(2)f\big((1-\ell(1))x^*\big) \quad \text{или} \quad u(2)x^* \geqslant u(2)f\big((1-\ell(1))x^*\big).$$

Следовательно,

$$\min\big\{\omega(2)x^*, u(2)x^*\big\} \geqslant \min\big\{\omega(2)f\big((1-\ell(1))x^*\big), u(2)f\big((1-\ell(1))x^*\big)\big\}$$

и, значит,

$$MB(1,x^*)\ell(1) \geqslant MB(2,x^*)\ell(2).$$

Также нетрудно показать, что $MB(2,x^*)\ell(2) \geqslant MB(3,x^*)\ell(3)$. Найдя математические ожидания $MB(2,x^*)\ell(2)$, $MB(3,x^*)\ell(3)$ и принимая во внимание (3.5), для любого $\ell(2)$ получаем

$$\begin{aligned} &f\Big(\max\big\{(1-\omega(2)), (1-u(2))\big\}x^*\Big) \\ \geqslant &f\Big(\max\big\{(1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))x^*\big), (1-u(2))f\big((1-\ell(1))x^*\big)\big\}\Big), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$(1-\omega(2))x^* \geqslant (1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))x^*\big).$$

Таким образом,

$$MB(2,x^*)\ell(2) \geqslant MB(3,x^*)\ell(3).$$

Продолжая рассуждения для всех $x \in (a_1, x^*)$ и $k = 1, 2, \ldots$ можно показать, что

$$MB(k,x^*)\ell(k) \geqslant MB(k+1,x^*)\ell(k+1) \tag{3.6}$$

а, значит, последовательность $\big\{MB(k,x^*)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ невозрастающая.

Из (3.4) и (3.6) по теореме Вейерштрасса получаем, что неубывающая последовательность $\big\{MA(k,x)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена сверху значением

$$B(1,x^*)\ell(1)=\min\big\{\omega(1),u(1)\big\}x^*\leqslant x^*,$$

а невозрастающая последовательность $\big\{MB(k,x^*)\big\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена снизу значением

$$A(1,x)\ell(1)=\min\big\{\omega(1)f(x),u(1)f(x)\big\}=\min\big\{\omega(1)f(x),f(x)-x\big\}\leqslant f(x).$$

Следовательно, существуют пределы (3.1). □

В следующей теореме получены условия, при которых с вероятностью единица существует положительный предел $H(\overline{\ell},x(0))$.

Теорема 3.1. *Предположим, что уравнение* (1.1) *имеет решение* $X(k)\equiv x^*>0$ *и выполнены следующие условия:*

1) *существует* $a_1\in[0,x^*)$ *такое, что* $0<f'(x)<1$ *для всех* $x\in(a_1,x^*)$,

2) $\Omega\subseteq[0,1],G(0)<1$.

Тогда для любого $x\in(a_1,x^*)$ *существует управление* $\overline{u}\in U$ *такое, что для почти всех* $\sigma\in\Sigma$ *существует положительный предел*

$$H(\overline{\ell},x(0))=\lim_{k\to\infty}MA(k,x)\ell(k)=\lim_{k\to\infty}MB(k,x^*)\ell(k),\tag{3.7}$$

не зависящий от начального значения $x(0)\in(a_1,x^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что управление $\overline{u}\in U$, при котором выполнено (3.7), можно определить равенством $u(k)=1-\dfrac{x}{A(k,x)}$ при $k=1,2,\ldots.$ Поскольку $\ell(k)\doteq\min\{\omega(k),u(k)\}\leqslant u(k)$, то для всех $k=1,2,\ldots$ выполнено неравенство

$$(1-\ell(k))A(k,x)\geqslant(1-u(k))A(k,x)=x.\tag{3.8}$$

При $k=1$ имеем $f(x)=A(1,x)<B(1,x^*)=x^*$, откуда следует, что

$$x=(1-u(1))A(1,x)\leqslant(1-u(1))B(1,x^*)\qquad\text{для всех } x\in(a_1,x^*).\tag{3.9}$$

Из (2.2), (3.8) и (3.9) для всех x из интервала (a_1,x^*) получаем

$$a_1<x\leqslant(1-\ell(1))A(1,x)\leqslant(1-\ell(1))B(1,x^*)\leqslant x^*.\tag{3.10}$$

Поскольку функция $f(x)$ возрастающая в (a_1,x^*), то

$$f\big((1-\ell(1))A(1,x)\big)\leqslant f\big((1-\ell(1))B(1,x^*)\big).$$

В силу теоремы Лагранжа и с учетом (2.1), существует $\widehat{x}_1\in\big((1-\ell(1))f(x),(1-\ell(1))x^*\big)$ такое, что

$$B(2,x^*)-A(2,x)=f\big((1-\ell(1))x^*\big)-f\big((1-\ell(1))f(x)\big)=f'(\widehat{x}_1)\big(1-\ell(1)\big)\big(x^*-f(x)\big).$$

Из (3.10) следует, что $\widehat{x}_1\in\big((1-\ell(1))f(x),(1-\ell(1))x^*\big)\subseteq(x,x^*)\subseteq(a_1,x^*)$, а значит $f'(\widehat{x}_1)<1$ и

$$B(2,x^*)-A(2,x)<\big(1-\ell(1)\big)\big(x^*-f(x)\big),\quad x\in(a_1,x^*).$$

Далее при $k=2$ получаем $f\big((1-\ell(1))f(x)\big) = A(2,x) < B(2,x^*) = f\big((1-\ell(1))x^*\big)$ и, следовательно,

$$(1-\ell(2))A(2,x) \leqslant (1-\ell(2))B(2,x^*) \quad \text{для всех } x \in (a_1, x^*). \tag{3.11}$$

С учетом (2.2), (3.8) и (3.11) для всех $x \in (a_1, x^*)$ имеем

$$a_1 < x \leqslant (1-\ell(2))A(2,x) \leqslant (1-\ell(2))B(2,x) \leqslant x^*.$$

Снова принимая во внимание, что функция $f(x)$ возрастающая в (a_1, x^*), получаем $f\big((1-\ell(2))A(2,x)\big) \leqslant f\big((1-\ell(2))B(2,x^*)\big)$. Затем, по теореме Лагранжа и с учетом (2.1), существует $\widehat{x}_2 \in \big((1-\ell(2))f(x), (1-\ell(2))x^*\big)$ такое, что

$$\begin{aligned} B(3,x^*) - A(3,x) &= f\big((1-\ell(2))B(2,x^*)\big) - f\big((1-\ell(2))A(2,x)\big) \\ &= f'(\widehat{x}_2)\big(1-\ell(2)\big)\big(B(2,x^*) - A(2,x)\big). \end{aligned}$$

Из последнего следует, что $\widehat{x}_2 \in \big((1-\ell(2))f(x), (1-\ell(2))x^*\big) \subseteq (x, x^*) \subseteq (a_1, x^*)$. Тогда $f'(\widehat{x}_2) < 1$ и

$$B(3,x^*) - A(3,x) < \big(1-\ell(2)\big)\big(B(2,x^*) - A(2,x)\big).$$

Окончательно для всех $k = 1, 2, \ldots$ и $x \in (a_1, x^*)$ выполнено $A(k{+}1, x) < B(k{+}1, x^*)$ и

$$\begin{aligned} B(k+1,x^*) - A(k+1,x) &= f\big((1-\ell(k))B(k,x^*)\big) - f\big((1-\ell(k))A(k,x)\big) \\ &\leqslant \big(1-\ell(k)\big)\big(B(k,x^*) - A(k,x)\big). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Из (3.12) следует, что для любых $k = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} 0 \leqslant B(k+1,x^*) - A(k+1,x) &< \big(1-\ell(k)\big)\big(B(k,x^*) - A(k,x)\big) \\ &< \big(1-\ell(k)\big)\big(1-\ell(k-1)\big)\big(B(k-1,x^*) - A(k-1,x)\big) \\ &< \ldots < \big(1-\ell(k)\big)\ldots\big(1-\ell(1)\big)\big(x^* - f(x)\big). \end{aligned}$$

Отметим, что, если выполнено условие 2 теоремы, то $\lim\limits_{k\to\infty}(1-\ell(1))\ldots(1-\ell(k)) = 0$ с вероятностью единица. Это показано в работе [16] при доказательстве теоремы 1.

Таким образом, по лемме 3.1 существуют пределы $\lim\limits_{k\to\infty} MA(k,x)$, $\lim\limits_{k\to\infty} MB(k,x^*)$ и из (3.12) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\big(B(k,x^*) - A(k,x)\big) = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} M\big(B(k,x^*)\ell(k) - A(k,x)\ell(k)\big) = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\big(B(k,x^*)\ell(k) - A(k,x)\ell(k)\big) = 0 \tag{3.13}$$

для почти всех $\sigma \in \Sigma$. Из (2.3) и (3.13) следует существование предела $H(\bar{\ell}, x(0))$ для почти всех $\sigma \in \Sigma$ и равенство (3.7). Управление $\overline{u} \in U$, при котором существует предел $H(\bar{\ell}, x(0))$, построено при доказательстве теоремы 2.3.

Покажем, что, если $x > a_1 > 0$, то предел (3.7) положительный. Для этого достаточно показать, что $M(A(1)\ell(1)) > 0$. Функция $f(x)$ возрастающая в интервале $x \in (a_1, x^*]$, поэтому, как показано выше, $A(1,x) = f(x) \geqslant x$ для любых $MA(1,x)\ell(x) \geqslant xM\ell(1)$. Покажем теперь, что $M\ell(1) > 0$, если $G(0) < 1$. Действительно, если выполнено $G(0) = \mu\big(\omega(1) = 0\big) < 1$, то $\mu\big(\ell(1) > 0\big) = \mu\big(\min\{\omega(1), u(1)\} > 0\big) \geqslant \mu\big(\omega(1) > 0\big) > 0$. Так как $\ell(1) \geqslant 0$, то для математического ожидания имеет место либо неравенство $M\ell(1) > 0$, либо равенство $M\ell(1) = 0$. В последнем случае $\ell(1) = 0$ с вероятностью единица [18, глава 2, § 6], что противоречит условию $\mu\big(\ell = 0\big) < 1$. □

Теорема 3.2. *Если уравнение* (1.1) *имеет решение* $X(k) \equiv x^* > 0$ *и выполнены следующие условия:*

1) *существует* $a_1 \in [0, x^*)$ *такое, что* $0 < f'(x) < 1$ *для всех* $x \in (a_1, x^*)$,

2) $\Omega \subseteq [0,1]$, $G(0) < 1$,

то для любого $k = 1, 2, \ldots$ *и почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *имеет место неравенство*

$$MA(k,x)\ell(k) \leqslant H(\overline{\ell}, x(0)) \leqslant MB(k,x^*)\ell(k). \tag{3.14}$$

Доказательство. Обозначим $a_k = MA(k,x)\ell(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. По лемме 3.1 числовая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ неубывающая. В силу теоремы 3.1 существует положительный предел $H(\overline{\ell}, x(0)) = \lim\limits_{k\to\infty} MA(k,x)\ell(k) = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \geqslant a_k$ для любого $k = 1, 2, \ldots$. Таким образом,

$$MA(k,x)\ell(k) \leqslant H(\overline{\ell}, x(0)).$$

Введя обозначение $b_k = MB(k,x^*)\ell(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ и проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что $H(\overline{\ell}, x(0)) \leqslant MB(k,x^*)\ell(k)$. □

4. Пример оптимизации средней временной выгоды для линейной модели динамики популяции

Предположим, что динамика популяции при отсутствии эксплуатации задана линейным разностным уравнением

$$X(k+1) = aX(k) + b, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.1}$$

где $0 < a < 1$, $b > 0$, $x(0) \in [0, +\infty)$ и случайные величины $\omega(1), \omega(2), \ldots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

Отметим, что уравнение (4.1) имеет устойчивое положение равновесия $x^* = \dfrac{b}{1-a}$, областью притяжения которого является промежуток $[0, +\infty)$. Пусть $u(k) = 1 - \dfrac{x}{A(k,x)}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, где случайная величина $A(k,x)$ определена (2.1).

Учитывая, что $u(1) = 1 - \dfrac{x}{f(x)}$, найдем математическое ожидание

$$MA(1,x)\ell(1) = f(x) M \min\bigl\{\omega(1), u(1)\bigr\}$$

как интеграл Лебега (см. [18, с. 227]):

$$\begin{aligned} MA(1,x)\ell(1) &= f(x) \int\limits_0^1 \min\bigl\{\omega(1), u(1)\bigr\}\, d\omega(1) \\ &= f(x) \Biggl(\int\limits_0^{u(1)} \omega(1)\, d\omega(1) + \int\limits_{u(1)}^1 u(1)\, d\omega(1) \Biggr) = \frac{f^2(x) - x^2}{2f(x)}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Теперь, учитывая, что $u(2) = 1 - \dfrac{x}{f\bigl((1-\ell(1))f(x)\bigr)}$, найдем математическое ожидание

$MA(2,x)\ell(2)$. Имеем

$$\begin{aligned}
MA(2,x)\ell(2) &= M\min\big\{A(2,x)\omega(2), A(2,x)u(2)\big\}\\
&= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \min\Big\{f\big((1-\ell(1))f(x)\big)\omega(2), f\big((1-\ell(1))f(x)\big)u(2)\Big\}\,d\omega(1)\,d\omega(2)\\
&= \int\limits_0^{u(1)}\Bigg(\int\limits_0^{u(2)} f\big((1-\omega(1))f(x)\big)\,\omega(2)\,d\omega(2) + \int\limits_{u(2)}^1 f\big((1-\omega(1))f(x)\big)\,u(2)\,d\omega(2)\Bigg)\,d\omega(1)\\
&+ \int\limits_{u(1)}^1\Bigg(\int\limits_0^{u(2)} f\big((1-u(1))f(x)\big)\,\omega(2)\,d\omega(2) + \int\limits_{u(2)}^1 f\big((1-u(1))f(x)\big)\,u(2)\,d\omega(2)\Bigg)\,d\omega(1)
\end{aligned}$$
$$= \int\limits_0^{u(1)} f\big((1-\omega(1))f(x)\big)\Big(u(2)-\frac{u^2(2)}{2}\Big)d\omega(1) + \int\limits_{u(1)}^1 f\big((1-u(1))f(x)\big)\Big(u(2)-\frac{u^2(2)}{2}\Big)d\omega(1). \quad (4.3)$$

Для оценки средней временной выгоды сверху найдем математическое ожидание

$$\begin{aligned}
MB(1,x^*)\ell(1) &= x^*\int\limits_0^1 \min\Big\{\omega(1), u(1)\Big\}\,d\omega(1)\\
&= x^*\Bigg(\int\limits_0^{u(1)}\omega(1)\,d\omega(1) + \int\limits_{u(1)}^1 u(1)\,d\omega(1)\Bigg) = \frac{\big(f^2(x)-x^2\big)x^*}{2f^2(x)},
\end{aligned}$$

Аналогично (4.3) найдем

$$\begin{aligned}
MB(2,x^*)\ell(2) &= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \min\Big\{f\big((1-\ell(1))x^*\big)\,\omega(2), f\big((1-\ell(1))x^*\big)\,u(2)\Big\}\,d\omega(1)\,d\omega(2)\\
&= \int\limits_0^{u(1)} f\big((1-\omega(1))x^*\big)\Big(u(2)-\frac{u^2(2)}{2}\Big)d\omega(1) + \int\limits_{u(1)}^1 f\big((1-u(1))x^*\big)\Big(u(2)-\frac{u^2(2)}{2}\Big)d\omega(1).
\end{aligned}$$

Пусть $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{4}$. Тогда динамика популяции при отсутствии эксплуатации (4.1) примет вид

$$X(k+1) = \frac{X(k)}{2} + \frac{1}{4}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Подставляя функцию $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$ в (4.2), нетрудно посчитать, что

$$MA(1,x)\ell(1) = \frac{(2x+1)^2 - 16x^2}{8(2x+1)},$$

и наибольшее значение этой функции достигается в точке $x \approx 0,0774$. Подставим функцию $f(x)$ в (4.3) и получим

$$MA(2,x)\ell(2) = \int\limits_0^{u(1)} \frac{(1-\omega(1))(2x+1)+2}{16}\left(1 - \frac{64x^2}{\big((1-\omega(1))(2x+1)+2\big)^2}\right) d\omega(1)$$
$$+ \int\limits_{u(1)}^{1} \frac{(1-u(1))(2x+1)+2}{16}\left(1 - \frac{64x^2}{\big((1-\omega(1))(2x+1)+2\big)^2}\right) d\omega(1)$$
$$= \frac{4x^2}{2x+1}\ln\left(\frac{2(2x+1)}{2x+3}\right) - \frac{256x^3-20x^2-12x-5}{32(2x+1)}.$$

Тогда наибольшее значение функции $MA(2,x)\ell(2)$ достигается в точке $x \approx 0,0272$.

Подставим функцию $f(x)$ в $MB(1,x^*)\ell(1)$ и $MB(2,x^*)\ell(2)$:

$$MB(1,x^*)\ell(1) = \frac{(2x+1)^2-16x^2}{4(2x+1)^2},$$

$$MB(2,x^*)\ell(2) = \frac{8x^2}{(2x+1)^2}\ln\left(\frac{2(2x+1)}{2x+3}\right) - \frac{768x^4+712x^3-172x^2-42x-9}{16(2x+1)^2(2x+3)}.$$

Окончательно получаем, что в силу (3.14) в момент $k=1$ наибольшее значение функции $MA(1,x)\ell(1)$ достигается в точке $x \approx 0,0774$ и выполнена следующая приближенная оценка средней временной выгоды с вероятностью единица

$$0,1339 \leqslant H(\overline{\ell}, x(0)) \leqslant 0,2320;$$

при $k=2$ наибольшее значение функции $MA(2,x)\ell(2)$ достигается в точке $x \approx 0,0272$ и имеем приближенную оценку средней временной выгоды с вероятностью единица

$$0,1571 \leqslant H(\overline{\ell}, x(0)) \leqslant 0,1867.$$

Поскольку при $k=3$ вычисления имеют весьма громоздкий вид, отметим только, что наибольшее значение функции $MA(3)\ell(3)$ достигается в точке $x \approx 0,0076$ и приближенные оценки средней временной выгоды с вероятностью единица

$$0,1641 \leqslant H(\overline{\ell}, x(0)) \leqslant 0,1718.$$

Отметим, что при увеличении k оценка средней временной выгоды получается более точной.

Благодарности: Автор выражает благодарность научному руководителю профессору кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, д.ф.-м.н. Л. И. Родиной за внимание к работе и руководство ее выполнением.

References

[1] C. W. Clark, "Mathematical Bioeconomics", *Mathematical Problems in Biology.* V. 2, Lecture Notes in Biomathematics, ed. S. Levin, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974, 29–45.

[2] B. Dennis, "Allee effects: population growth, critical density, and the chance of extinction", *Natural Resource Modeling*, **3**:4 (1989), 481–538.

[3] A. M. Parma, "Optimal harvesting of fish populations with non-stationary stock-recruitment relationships", *Natural Resource Modeling*, **4**:1 (1990), 39–76.

[4] A. O. Belyakov, V. M. Veliov, "On optimal harvesting in age-structured populations", *Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making.* V. 22: *Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance*, eds. H. Dawid, K. F. Doerner, G. Feichtinger, P. M. Kort, A. Seidl, Springer Cham, Switzerland, 2016, 149–166.

[5] А. В. Егорова, Л. И. Родина, "Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 501–517. [A. V. Egorova, L. I. Rodina, "On optimal harvesting of renewable resource from the structured population", *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **29**:4 (2019), 501–517 (In Russian)].

[6] W. J. Reed, "The steady state of a stochastic harvesting model", *Mathematical Biosciences*, **41**:3-4 (1978), 273–307.

[7] R. Lande, S. Engen, B. E. Saether, *Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation*, Oxford University Press, New York, 2003, 212 pp.

[8] S. J. Schreiber, M. Benaim, K. A. S. Atchadé, "Persistence in fluctuating environments", *Journal of Mathematical Biology*, **62**:5 (2011), 655–683.

[9] O. Tahvonen, M. F. Quaas, R. Voss, "Harvesting selectivity and stochastic recruitment in economic models of age-structured fisheries", *Journal of Environmental Economics and Management*, **92** (2018), 659–676.

[10] B. Yang, Y. Cai, K. Wang, W. Wang, "Optimal harvesting policy of logistic population model in a randomly fluctuating environment", *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **526** (2019), Article ID 120817.

[11] A. Hening, K. Q. Tran, T. T. Phan, G. Yin, "Harvesting of interacting stochastic populations", *Journal of Mathematical Biology*, **79**:2 (2019), 533–570.

[12] Л. И. Родина, "Об одной стохастической модели сбора возобновляемого ресурса", *Вестник российских университетов. Математика*, **23**:124 (2018), 685–695. [L. I. Rodina, "About one stochastic harvesting model of a renewed resourse", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **23**:124 (2018), 685–695 (In Russian)].

[13] А. А. Родин, Л. И. Родина, А. В. Черникова, "О способах эксплуатации популяции, заданной разностным уравнением со случайными параметрами", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **32**:2 (2022), 211–227. [A. A. Rodin, L. I. Rodina, A. V. Chernikova, "On how to exploit a population given by a difference equation with random parameters", *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **32**:2 (2022), 211–227 (In Russian)].

[14] T. Upmann, S. Behringer, "Harvesting a remote renewable resource", *Theoretical Ecology*, **13**:4 (2020), 459–480.

[15] M. Liu, "Optimal Harvesting of Stochastic Population Models with Periodic Coefficients", *Journal of Nonlinear Science*, **32**:2 (2022), 1–14.

[16] Л. И. Родина, "Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28**:1 (2018), 48–58. [L. I. Rodina, "Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft", *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:1 (2018), 48–58 (In Russian)].

[17] Л. И. Родина, "Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28**:2 (2018), 213–221. [L. I. Rodina, "Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource", *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:2 (2018), 213–221 (In Russian)].

[18] А. Н. Ширяев, *Вероятность-1*, Наука, М., 1989. [A. N. Shiryaev, *Probability-1*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian)].

[19] Ю. М. Свирежев, Д. О. Логофет, *Устойчивость биологических сообществ*, Наука, М., 1978. [Yu. M. Svirezhev, D. O. Logofet, *Stability of Biological Communities*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russian)].

[20] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, **2**, Мир, М., 1984. [V. Feller, *Introduction to Probability Theory and its Applications*, **2**, Mir Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].

Информация об авторе

Черникова Анастасия Владимировна, аспирант, кафедра функционального анализа и его приложений. Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация. E-mail: nastik.e@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3930-0743

Поступила в редакцию 18.08.2022 г.
Поступила после рецензирования 14.11.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Information about the author

Anastasia V. Chernikova, Post-Graduate Student, Functional Analysis and its Applications Department. Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation. E-mail: nastik.e@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3930-0743

Received 18.08.2022
Reviewed 14.11.2022
Accepted for press 24.11.2022